

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzlar

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 4 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
27. November 2021

Aufgabe 1 (jeweils 2 Punkte). Finden Sie je alle Häufungspunkte und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Folgengliedern

$$(i) \ a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}, \quad (ii) \ a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}, \quad (iii) \ a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{2^n + (-3)^n},$$

$$(iv) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (v) \ a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

Achten Sie auf eine saubere und nachvollziehbare Beweisstruktur.

Lösung. Vorbemerkung: Wann immer der Grenzwert einer Folge existiert, ist dieser gleichzeitig der einzige Häufungspunkt der Folge.

(i) Es ist

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} = 1 + \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2} + \frac{6}{n^3},$$

also nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Summen aus der Vorlesung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

(ii) Erweitern mit $1/n$ ergibt

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}}.$$

Da Zähler und Nenner jeweils gegen 1 konvergieren, folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Quotienten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

(iii) Wir formen um:

$$a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{2^n + (-3)^n} = (-1)^n \frac{2^n + (-3)^n}{2^n + (-3)^n} = (-1)^n.$$

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent mit Häufungspunkten 1 und -1 .

(iv) Wir formen wieder zunächst um, indem wir mit $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ erweitern:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Wähle mit dem archimedischen Axiom $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, dass

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(v) Wir erinnern uns an Tutoriumsblatt 01 und die Formel

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Damit ist

$$a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Nach Vorlesung folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{3}.$$

□

Aufgabe 2 (10 Punkte). Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 := 5$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{4a_n + 3}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung. Wir beweisen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $a_2 = \sqrt{4a_1 + 3} = \sqrt{23} < \sqrt{25} = 5 = a_1$.

Induktionsschritt: Es gelte $a_{n+1} \leq a_n$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$4a_{n+1} + 3 \leq 4a_n + 3, \quad \text{also} \quad \sqrt{4a_{n+1} + 3} \leq \sqrt{4a_n + 3},$$

was nichts anderes ist als $a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Dies schließt den Induktionsbeweis ab.

Aus der obigen Tatsache folgt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Die Folge ist zudem nach unten durch 0 beschränkt, also konvergiert sie nach einem Satz aus der Vorlesung gegen einen Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$. Nun gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1}^2 = 4a_n + 3,$$

und wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ sowie den Rechenregeln für Grenzwerte (Grenzwerte von Produkten und Summen) aus der Vorlesung damit

$$a^2 = 4a + 3.$$

Lösen dieser Gleichung liefert $a = 2 - \sqrt{7}$ oder $a = 2 + \sqrt{7}$. Zweiteren Fall können wir ausschließen wegen $a \geq 0$, also ist der gesuchte Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 + \sqrt{7}.$$

□

Aufgabe 3 (10 Punkte). Seien $0 < a < 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie für $l := \frac{1}{a} - 1 > 0$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{(1+l)^n}{n^k} \geq \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n$$

unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes.

Lösung. Sei l wie im Hinweis und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem archimedischem Axiom existiert ein $m \in \mathbb{N}$ (abhängig von a und k) mit

$$m > \frac{(k+1)!}{\varepsilon(l/2)^{k+1}}. \quad (1)$$

Diese Wahl wird später klar. Setze $N := \max\{m, 2k+2\}$ und sei $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ gegeben. Dann gilt $n \geq 2k+2$ und

$$n \geq N \geq m \stackrel{(1)}{>} \frac{(k+1)!}{\varepsilon(l/2)^{k+1}}. \quad (2)$$

Wir schätzen mithilfe des binomischen Lehrsatzes ab:

$$\frac{(1+l)^n}{n^k} = n^{-k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} l^j \geq n^{-k} \binom{n}{k+1} l^{k+1},$$

wobei wir alle (positiven) Summanden durch den $k+1$ -ten abgeschätzt haben (bemerke $n > k+1$). Die rechte Seite können wir weiter umschreiben und abschätzen:

$$\begin{aligned} n^{-k} \binom{n}{k+1} l^{k+1} &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\prod_{j=1}^{k+1} (n+1-j)}{n^k} \\ &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\prod_{j=0}^k (n-j)}{n^k} \\ &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \frac{n^{k+1} \prod_{j=0}^k (1-j/n)}{n^k} \\ &\geq \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \cdot 2^{-k-1} \cdot n = \frac{(l/2)^{k+1}}{(k+1)!} \stackrel{(2)}{>} \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

wobei wir $1 - \frac{j}{n} \geq 1 - \frac{k}{n} \geq \frac{1}{2}$ für jedes $j \in \{0, \dots, k\}$ verwendet haben. Kombinieren wir die obigen Abschätzungen, folgt

$$|n^k a^n - 0| = \frac{n^k}{(1+l)^n} < \varepsilon,$$

also die Behauptung. □

Aufgabe 4 (2 + 3 + 5 Punkte). Sei $p > 0$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Hinweis: Reduzieren Sie die Aussage auf den Fall $p > 1$. Wenden Sie dann auf $x_n := \sqrt[n]{p} - 1$ die Bernoullische Ungleichung an.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Hinweis: Beweisen Sie die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

für alle $x > 0$ und wenden Sie diese auf $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$ an.

Lösung. (i) Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem archimedischen Axiom existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} < \varepsilon^{1/p}. \quad (3)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gegeben. Es folgt

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} < \varepsilon,$$

wobei wir verwendet haben, dass für alle reellen Zahlen $x > y > 0$ gilt, dass $x^p > y^p$.

In der Tat: Angenommen, $x^p \leq y^p$, dann ergibt multiplizieren der Ungleichung mit $x^{-p} > 0$ und $y^{-p} > 0$ zusammen mit den Rechenregeln für reelle Potenzen aus Übungsblatt 02, Aufgabe 4:

$$x^p x^{-p} y^{-p} \leq y^p x^{-p} y^{-p} \Leftrightarrow y^{-p} \leq x^{-p}.$$

Kehrwertbildung und die Rechenregel $x^{-p} = (x^p)^{-1}$ liefert $y^p \geq x^p$, Widerspruch. Also $x^p > y^p$.

(ii) Für $p = 1$ ist nichts zu zeigen. Falls $p < 1$, so setze $q := \frac{1}{p} > 1$. Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1$ folgt dann

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Quotienten aus der Vorlesung. Es reicht also, den Fall $p > 1$ zu betrachten. Wir befolgen den Hinweis, setzen $x_n := \sqrt[n]{p} - 1 > 0$ und folgern mit der Bernoulli-Ungleichung

$$p = (1+x_n)^n \geq 1 + nx_n,$$

also

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}. \quad (4)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle mit dem archimedischen Axiom $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{p-1}$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$:

$$|x_n - 0| = x_n \stackrel{(4)}{\leq} \frac{p-1}{n} \leq \frac{p-1}{N} < \varepsilon.$$

Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ oder äquivalent $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(iii) Wir beweisen zunächst die im Hinweis angegebene Ungleichung: Seien $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ (für $n = 1$ ist die Ungleichung trivial), dann folgt mit dem binomischen Lehrsatz

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \geq \binom{n}{2} x^2,$$

wobei wir alle (positiven) Summanden durch den Summanden mit $k = 2$ abgeschätzt haben. Wegen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ist das die behauptete Ungleichung.

Wenden wir nun die Ungleichung auf $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ an. Es ist

$$n = (1+x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_n^2,$$

also

$$0 < x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad (5)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle mit dem archimedischen Axiom $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Ohne Einschränkung ist $N \geq 2$. Dann folgt für alle $n \geq N \geq 2$, dass $n-1 \geq \frac{n}{2}$ und damit

$$|x_n - 0| = x_n \stackrel{(5)}{\leq} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{4}{n}} \leq \sqrt{\frac{4}{N}} < \sqrt{4 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}} = \varepsilon.$$

Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ oder äquivalent $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □